Département STID - IUT Paris Descartes **2017-2018**

Probabilités - S2

TD 6 - Couples de variables aléatoires continues

Exercice 1

Considérons la loi de probabilité du couple de variables aléatoires (X, Y) définie par sa densité conjointe f par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \text{ et } y \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer les densités marginales de X et Y.

3) X et Y sont-elle indépendantes ?

Exercice 2

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} a\left(x + y^2\right) & \text{si } x \in [0,1] \text{ et } y \in [0,1] \\ & \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer a pour que f soit une densité de probabilité.

2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité f. Calculer les densités marginales de X et de Y.

3) X et Y sont-elle indépendantes ?

4) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4 bis) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

5) Calculer la covariance de X et Y.

6) Calculer la densité de la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$.
En quoi ce résultat confirme-t-il celui de la question **3)** ?

6 bis) Calculer la densité de la loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$.

7) Calculer l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = x$.

7 bis) Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $Y = y$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}\left(xy + x^2\right) & \text{si } x \in [0,1] \text{ et } y \in [0,2] \\ & \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a- Montrer que f est une densité de probabilité.

b- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité f. Calculer les densités marginales de X et de Y.

c- Calculer $E(X)$, $V(X)$.

d- X et Y sont-elle indépendantes ?