Département STID - IUT Paris Descartes **2017-2018**
Probabilités - S2

TD 5 - Intégrales doubles

Théorème de Fubini pour le calcul d'une intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$:

(i) Quand le domaine $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$, φ_1 et φ_2 étant deux fonctions définies sur $[a;b]$,

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x$$

(ii) Quand le domaine $\mathcal{D} = [a;b] \times [c;d]$ est un ***pavé***,

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x\right]\ \mathrm{d}y$$

(iii) Quand le domaine $\mathcal{D} = [a;b] \times [c;d]$ ***et*** que la fonction s'écrit $f(x,y) = g(x) \times h(y)$,

$$\iint_{\mathcal{D}} g(x) \times h(y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \left[\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\right] . \left[\int_c^d h(y)\ \mathrm{d}y\right]$$

Remarque : Cette année on n'utilise pas Fubini (i).

Exercice 1
Soit $\mathcal{D} = [1;9] \times [6;10]$ et $f(x,y) = k$.

1) A quoi k doit-il être égal pour que $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 1$?

Exercice 2
Soit $\mathcal{D} = [10;20] \times [-1;1]$ et $f(x,y) = \dfrac{e^{-y}}{x^2}$.

1) Calculer $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

2) Calculer $\int_{10}^{20} \dfrac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$, puis $\int_{-1}^{1} e^{-y}\ \mathrm{d}y$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3
Soit le domaine $\mathcal{D} = [0;2] \times [1;4]$ et la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} - 2xy$.

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}$.

2) Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathcal{D}$.

3) Calculer $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

4) Que dit le théorème de Fubini ?

Exercice 4
Soit le domaine $\mathcal{D} = [2;5] \times [1;3]$ et la fonction $f(x,y) = \dfrac{4x}{y} - \dfrac{y}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathcal{D}$.

2) Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 5
Soit le domaine $\mathcal{D} = [0;4] \times [1;2]$ et la fonction $f(x,y) = e^{-(5x+3y)}$.

Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 6
NE PAS TRAITER, TROP COMPLIQUÉ
Exemple de fonction pour laquelle Fubini *(iii)* **ne s'applique pas.**

Soit le domaine $\mathcal{D} = [1;2] \times [3;5]$ et la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\int_3^5 \frac{1}{x+y}\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \Big[\ln(x+y)\Big]_{y=3}^{y=5}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 (\ln(x+5) - \ln(x+3))\ \mathrm{d}x = \Big[(x+5)\ \ln(x+5) - (x+5) + (x+3)\ \ln(x+3) - (x+3)\Big]_1^2$$

$$= 7\ \ln(7) - 7 + 5\ \ln(5) - 5 - (6\ \ln(6) - 6 + 4\ \ln(4) - 4 \simeq 3,3728$$

Corrigés

Corrigé exercice 1

L'intégrale est le volume d'un parallélépipède rectangle dont la base est le rectangle $\mathcal{D}$ et la hauteur k.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_1^9 \left[\int_6^{10} k\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x = \int_1^9 \Big[ky\Big]_{y=6}^{y=10}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^9 4k\ \mathrm{d}x = \Big[4ky\Big]_1^9 = 4k(9-1) = 32k$$

$$I = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{32}$$

Corrigé exercice 2

Soit $\mathcal{D} = [10;20] \times [-1;1]$ et $f(x,y) = \dfrac{e^{-y}}{x^2}$.

1) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{10}^{20} \left[\int_{-1}^{1} \frac{e^{-y}}{x^2}\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x = \int_{10}^{20} \left[\frac{1}{x^2}\ (-e^{-y})\right]_{y=-1}^{y=1}\ \mathrm{d}x$

$$= \int_{10}^{20} (e - e^{-1})\ \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = (e - e^{-1})\ \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{20} = (e - e^{-1})\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) \simeq 0,11752$$

2) $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{20} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0,05$

$$\int_{-1}^{1} e^{-y}\ \mathrm{d}y = \Big[-e^{-y}\Big]_{-1}^{1} = -e^{-1} + e^{1} \simeq 2,3504$$

On remarque que $\displaystyle\iint_{[10;20]\times[-1;1]} \frac{e^{-y}}{x^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \left(\int_{10}^{20} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_{-1}^{1} e^{-y}\ \mathrm{d}y\right)$

Corrigé exercice 4

Soit le domaine $\mathcal{D} = [2;5] \times [1;3]$ et la fonction $f(x,y) = \dfrac{4x}{y} - \dfrac{y}{x^2}$.

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}$.

2) f n'est pas définie aux points $(0;y)$ et $(x;0)$, ces points $\notin \mathcal{D}$.

3)

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^5 \left[\int_1^3 \left(\frac{4x}{y} - \frac{y}{x^2}\right)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x = \int_2^5 \left[4x\ln y - \frac{y^2}{2x^2}\right]_{y=1}^{y=3}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_2^5 \left[4x\ln 3 - \frac{9}{2x^2} - 4x\ln 1 + \frac{1}{2x^2}\right]\ \mathrm{d}x = \int_2^5 \left[4x\ln 3 - \frac{4}{x^2}\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \left[2x^2\ln 3 + \frac{4}{x}\right]_2^5 = 50\ \ln 3 + \frac{4}{5} - 8\ \ln 3 - 2 \\
&= 42\ \ln 3 - 1,2 \simeq 44,94
\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}
I &= 4\left[\int_2^5 x\ \mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_1^3 \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y\right] + \left[\int_2^5 \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_1^3 y\ \mathrm{d}y\right] \\
&= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5\cdot\Big[\ln y\Big]_1^3 + \left[\frac{1}{x}\right]_2^5\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \cdots = 42\ \ln 3 - 1,2 \simeq 44,94
\end{aligned}$$

Corrigé exercice 5

Soit le domaine $\mathcal{D} = [0;4] \times [1;2]$ et la fonction $f(x,y) = e^{-(5x+3y)}$.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\mathcal{D}} e^{-(5x+3y)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^4 \int_1^2 e^{-(5x+3y)}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^4 \int_1^2 e^{-5x-3y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \int_1^2 e^{-5x}\ e^{-3y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \left(\int_0^4 e^{-5x}\ \mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_1^2 e^{-3y}\ \mathrm{d}y\right) = \left[-\frac{1}{5}\ e^{-5x}\right]_0^4\cdot\left[-\frac{1}{3}\ e^{-3y}\right]_1^2 \\
&= \left(-\frac{1}{5}\ e^{-20} + \frac{1}{5}\ e^0\right)\left(-\frac{1}{3}\ e^{-6} + \frac{1}{3}\ e^{-3}\right) \simeq 0,2 \times 0,01577 \simeq 0,0031539
\end{aligned}$$