

**TD 4 - Couples de variables aléatoires discrètes**

**Exercice 1**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variable aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée dans le tableau suivant :

<b>X \ Y</b>	-1	0	1	Total
1		0,1		0,4
2	0,05			0,6
Total	0,2		0,3	1

- 1) Compléter le tableau.
- 2) Quelles sont les lois marginales de  $X$  et de  $Y$  ?
- 3)  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- 4) Calculer l'espérance et la variance de  $X$  et de  $Y$ . Calculer la covariance de  $X$  et  $Y$ .
- 5) Déterminer la loi de  $X - Y$ , ainsi que son espérance et sa variance.

**Exercice 2**

Considérons la loi de probabilité du couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  donnée dans le tableau suivant :

<b>X \ Y</b>	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0,12	0,08	0,20
$x_2$	0,18	0,12	0,30

Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Justifier.

**Exercice 3**

Considérons la loi conjointe  $\{(x_i, y_j), p_{ij}\}$  du couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  définie dans le tableau suivant :

<b><math>x_i \backslash y_j</math></b>	2	3	4
1	0,10	0,10	0,05
2	0,20	0,10	0,05
3	0,10	0,20	0,10

- 1) Déterminer les espérances et les variances de  $X$  et  $Y$  respectivement.
- 2) Déterminer les espérances et les variances de  $Y$  sachant  $X$ .
- 3) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- 4) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X + Y$ .
- 5) Calculer la variance de la variable aléatoire  $X + Y$ .

**Exercice 4**

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. L'expérience aléatoire consiste à effectuer deux tirages successifs sans remise. Notons respectivement  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires indiquant respectivement le chiffre marqué sur la première et la deuxième boule tirée. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X + Y$ .

**Exercice 5**

Considérons la loi conjointe du couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  définie dans le tableau suivant :

<b>X</b> \ <b>Y</b>	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

- 1) Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ . Ces variables sont-elles indépendantes ?
- 2) Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .
- 3) Soit  $U = \min(X, Y)$  et  $V = \max(X, Y)$ . Déterminer la loi du couple  $(U, V)$ .

**Exercice 6**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

<b>X</b> \ <b>Y</b>	-1	0	1
0	$a$	$2a$	$a$
1	$1,5a$	$3a$	$b$

- 1) Quelles conditions doivent vérifier  $a$  et  $b$  ?
- 2) Calculer, en fonction de  $a$  et  $b$ , les lois conditionnelles de  $X$  et  $Y$ .
- 3) Calculer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes. Calculer la variance de la variable aléatoire  $S = X + Y$  pour ces valeurs de  $a$  et  $b$ .