# TD 3 - Inégalité de Bienaymé-Tchebichev - Convergence en probabilité
# Corrigés

**Rappels :**

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** pour une variable aléatoire d'espérance et de variance finies :

$$\forall t > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}$$

- **Inégalité de Markov** $\forall Z$ variable aléatoire positive $, \forall a > 0 \qquad P(Z > a) \leqslant \dfrac{E(Z)}{a}$
- **Convergence en probabilité**

  Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. On dit que $U_n$ converge en probabilité vers $\mu \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|U_n - \mu| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- **Loi (faible) des grands nombres**

  Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même espérance (finie) $\mu$ et de même variance (finie) $\sigma^2$, alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$$

**Exercice 1**
Ici : $X - E(X) = X - 20$ et $0 \leqslant X \leqslant 40 \Leftrightarrow -20 \leqslant X - 20 \leqslant 20 \Leftrightarrow |X - 20| \leqslant 20$

On applique B-T à $t = 20$ et $V(X) = 20$ :

$$P(|X-20| \geqslant 20) \leqslant \frac{20}{20^2} = 0,05 \Leftrightarrow 1 - P(|X-20| \leqslant 20) \leqslant 0,05 \Leftrightarrow$$
$$P(|X-20| \leqslant 20) \geqslant 1 - 0,05 = 0,95 \Leftrightarrow P(0 \leqslant X \leqslant 40) \geqslant 0,95$$

On peut vérifier que c'est vrai si $X \sim \mathcal{N}(20; \sigma^2 = 20)$ :

$P(0 \leqslant X \leqslant 40) = P\left(\dfrac{0-20}{\sqrt{20}} \leqslant \dfrac{X-20}{\sqrt{20}} \leqslant \dfrac{40-20}{\sqrt{20}}\right) = P\left(-4,472 \leqslant \dfrac{X-20}{\sqrt{20}} \leqslant 4,472\right) = F(4,472) - F(-4,472) = F(4,472) - (1 - F(4,472)) = 2\ F(4,472) - 1 \simeq 2 \times 1 - 1 = 1$ où $\dfrac{X-20}{\sqrt{20}} \sim \mathcal{N}(0;1)$ et $F$ est la fonction de répartition de la loi normale réduite centrée.

On a bien $P(0 \leqslant X \leqslant 40) = 1 \geqslant 0,95$.

**Exercice 2**
Soient $X_i,\ i = 1, 2 \ldots, 100$ des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0;1]$. Évaluer approximativement $P\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{100} X_i > 6\right)$.

$0 \leqslant X_i \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{100} X_i \leqslant 100.$

On peut conjecturer que $P\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{100} X_i > 6\right) \simeq \dfrac{100-6}{100} = 0,94$

**Exercice 3**
On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

**1)** Si on applique l'inégalité de Markov, on a $P(X > 75) \leqslant \dfrac{50}{75} \simeq 0,67$

**2)** $P(40 \leqslant X \leqslant 60) = P(-10 < X - 50 < 10) = P(|X - 50| < 10)$.

On écrit l'inégalité de B-T : $P(|X - 50| > 10) \leqslant \dfrac{25}{10^2} = 0,25$

On en déduit : $1 - P(|X - 50| < 10) \leqslant 0,25 \Leftrightarrow P(|X - 50| < 10) \geqslant 1 - 0,25 = 0,75$

$\Leftrightarrow P(|X - 50| < 10) = P(40 \leqslant X \leqslant 60) \geqslant 0,75$

**Exercice 4**
On effectue $n$ lancers successifs supposés indépendants d'une pièce parfaitement équilibrée.

**1)** Chaque lancer est un tirage de Bernoulli, avec $p = \dfrac{1}{2}$. Si on appelle $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $S_n \sim \mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{2}\right)$ le nombre de pile, avec $E(S_n) = \dfrac{n}{2}$ et $V(S_n) = n.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{4}$

**2)** $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ donc $E(F_n) = \dfrac{1}{n}\ E(S_n) = \dfrac{1}{n}\ n\ E(X_i) = \dfrac{1}{2}$

$V(F_n) = \dfrac{1}{n^2}\ V(S_n) = \dfrac{1}{n^2}\ \dfrac{n}{4} = \dfrac{1}{4n}$.

**3)** Pour quels nombres $n$ de lancers peut-on affirmer, avec un risque de se tromper inférieur à 5 %, que la proportion de piles au cours de ces $n$ lancers diffère de $\dfrac{1}{2}$ d'au plus un centième.

On écrit l'inégalité de B-T pour $S_n$ :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0,01) \leqslant \frac{V(F_n)}{0,01^2} \Rightarrow P\left(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{1}{4n \times 0,01^2}$$

On choisit $n$ vérifiant $\dfrac{1}{4n \times 0,01^2} \leqslant 0,05 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{1}{4 \times 0,05 \times 0,01^2} = 50\ 000$.

Il faut lancer la pièce 50 000 fois pour qu'on puisse affirmer avec seulement 5% de risque de se tromper quela proportion de pile sera $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{100}$.

**Exercice 5**
*Approximation d'une loi Binômiale* $\mathcal{B}(n,p)$

L'approximation d'une loi binômiale par une loi normale se justifie dès que $n \geqslant 30, np \geqslant 5$ et $n(1-p \geqslant 5$.

**(a)** $X \sim \mathcal{B}(50;\ 0,2)$. Ici $n = 50 > 30, np = 10 > 5$ et $n(1-p) = 40 > 5$,
donc $X \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(10, 8)$

$$P(X \leqslant 4) = P\left(\frac{X-10}{\sqrt{8}} \leqslant \frac{4-10}{\sqrt{8}}\right) = P\left(\frac{X-10}{\sqrt{8}} \leqslant -2,12132\right) = F(-2,12132) = 1 - F(2,12132)$$

$\Rightarrow P(X \leqslant 4) = 0.0169$ (approximation) où $F$ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Lorsque l'on regarde dans une table de la loi binômiale, pour $X \sim \mathcal{B}(50;\ 0,2)$ on trouve :
$P(X \leqslant 4) = 0,0185$.

**(b)** $X \sim \mathcal{B}(200;\ 0,5)$. Ici $n = 200 > 30$ et $np = n(1-p) = 100 > 5$,
donc $X \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(100, 50)$

$P(X \leqslant 70) = P\left(\dfrac{X-100}{\sqrt{50}} \leqslant \dfrac{70-100}{\sqrt{50}}\right) = P\left(\dfrac{X-100}{\sqrt{50}} \leqslant -4,24264\right) = F(-4,24264) = 1 - F(4,24264)$

$\Rightarrow P(X \leqslant 70) = 0$ (approximation) où $F$ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Lorsque l'on regarde dans une table de la loi binômiale, pour $X \sim \mathcal{B}(200;\ 0,5)$ on trouve : $P(X \leqslant 70) = 0$, c'est à dire le même résultat.

**Exercice 6**

Une compagnie aérienne utilise un avion qui peut transporter au maximum 400 passagers. La probabilité pour qu'un passager, ayant réservé pour un vol donné, ne se présente pas à l'embarquement est de 0,08.

**1)** La compagnie accepte pour un vol 420 réservations. On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

a- $X \sim \mathcal{B}(420;\ 0,92)$.

b- Ici $n = 420 > 30, np = 386,4 > 5$ et $n(1-p) = 33.6 > 5$,

donc $X \sim \mathcal{B}(420;\ 0,92) \simeq \mathcal{N}(336,4;\ 30,912)$.

$P(X \leqslant 400) = P\left(\dfrac{X-336,4}{\sqrt{30,912}} \leqslant \dfrac{400-336,4}{\sqrt{30,912}}\right) \simeq P\left(\dfrac{X-336,4}{\sqrt{30,912}} \leqslant 2,44\right) \simeq 0.993.$

Donc la société prend peu de risques mais aura tout de même des soucis pour 7 vols sur 1000.

**2)** La compagnie accepte pour un vol donné $n$ réservations (avec $n \geq 400$). Déterminer la valeur maximale de $n$ pour que la probabilité de l'événement $(X \leq 400)$ soit supérieure ou égale à 0,95.

$X \sim \mathcal{B}(n;\ 0,92) \simeq \mathcal{N}(0,92\ n;\ 0,08 \times 0,92\ n = 0,0736\ n)$.

$P(X \leqslant 400) = P\left(\dfrac{X-0,92\ n}{\sqrt{0,0736\ n}} \leqslant \dfrac{400-0,92\ n}{\sqrt{0,0736\ n}}\right) \geqslant 0,95 \Rightarrow \dfrac{400-0,92\ n}{\sqrt{0,0736\ n}} = 1,645.$

Cela revient à résoudre l'équation du second degré $0,92\ x^2 + 1,645\ \sqrt{0,0736}x - 400 = 0$ avec $x = \sqrt{n}$. On ne veut que la racine positive.

$\Delta = 1,645^2 \times 0,0736 + 4 \times 400 \times 0,92 \simeq 1472,12 \simeq 38,37^2$

$x = \sqrt{n} = \dfrac{-1,645\ \sqrt{0,0736} + 11,3225}{2 \times 0,92} \Rightarrow n \simeq 424,8$

Donc pour $n \leq 425$ on aura $\mathbb{P}(X \leqslant 400) \geq 0.95$

**Exercice 7**

**Loi du min et du max**

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur un même espace $\Omega$ et à valeurs réelles. On note $F$ la fonction de répartition de $X_1$.

**1)** **(a)** $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(1,1),(1,2),\ldots(6,6)\}$ 36 couples,

$E_1 = (M_2 = 1) = \{(1,1)\},\ E_2 = (M_2 = 2) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},\ E_3 = (M_2 = 3) = \ldots.$

**(b)** $F(1) = P(\max_2 = 1) = 1/36, F(2) = 4/36, F(3) = F(2) + 5/36 = 9/36, F(4) = F(3) + 7/36 = 16/36, F(5) = F(4) + 9/36 = 25/36, F(6) = F(5) + 11/36 = 36/36 = 1.$

On remarque que ces quantités sont resp égales à $(1/6)^2, (2/6)^2, (3/6)^2, (4/6)^2, (5/6)^2, (6/6)^2 = 1$

**2)** $F_{M_n}(x) = P(M_n \leqslant x) = P(\max\{X_i\} \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) \Rightarrow$

$F_{M_n}(x) = P(X_1 \leqslant x) \times P(X_2 \leqslant x), \cdots \times P(X_n \leqslant x) = F(x)^n$

**3)** On lance un dé 2 fois, donc $n = 2$. Soient $X_1$ et $X_2$ les résutats respectifs de ces 2 lancers. Soit $m_2 = \min\{X_1, X_2\}$ la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la plus petite valeur parmi $X_1(\omega), X_2(\omega)$.

**(a)** Écrire $\Omega$, puis les évènements $E_1 = (m_2 = 1),\ E_2 = (m_2 = 2), E_3 = (m_2 = 3)$.

**(b)** Déterminer la fonction de répartition $F$ de $m_2$.

**4)** $F_{m_n}(x) = P(m_n \leqslant x) = 1 - P(m_n > x) = 1 - P(\min\{X_i\} > x)$

$\Rightarrow F_{m_n}(x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - P(X_1 > x) \times P(X_2 > x), \cdots \times P(X_n > x)$ car les $X_i$ sont indépendantes

$\Rightarrow F_{m_n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$

**5)** $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, donc $F_{M_n}(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n$ et $F_{m_n}(x) = 1 - \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\right)^n = 1 - e^{-\lambda n x}$