TD 3 Independance et corrélation

<u>Chap II</u> <u>Independance</u>.

Indep d'evenements $P(A\cap B)$ $P(A|B)$

Indep de va discrets, continus

<u>Propriété</u> $X \perp Y \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

<u>propriété</u> $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

alors $X \perp Y \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

<u>Corrélation</u>

<u>Def cov</u> $cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$

<u>Propriétés</u> ~~dont~~ • $V(X+Y) = V(X)+V(Y) + 2\,cov(X,Y)$

• $X \perp Y \Rightarrow cov(X,Y) = 0$

$\Leftarrow$ Fausse.

<u>Def</u> $cov(X,Y) = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$ X et Y sont non corrélés

<u>Rmq</u> : corrél repres ~~indep li~~ dépendance <u>linéaire</u>

D'où $cov(X,Y) = 0 \Rightarrow \nexists\, a,b_{a\neq 0} \;/\; Y = aX+b$

Contrap $\exists\, a,b_{a\neq 0} \;/\; Y = aX+b \Rightarrow cov(X,Y) \neq 0$

<u>Def</u> coeff corrél lin $cor(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

<u>Propriétés</u> $-1 \leq cor(X,Y) \leq 1$

$X \perp Y \Rightarrow cor(X,Y) = 0$

$|cor(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists\, a,b_{a\neq 0} \;/\; Y = aX+b$.

TDS 1/

Ex 1.

1) $2X_1+3X_2 \sim \mathcal{N}(2\mu_1+3\mu_2 ; 4\sigma_1^2+9\sigma_2^2)$

$Var(2X_1+3X_2) = Var(2X_1) + Var(3X_2) = 4Var(X_1) + 9Var(X_2)$

ssi X_1 & X_2 sont indépendantes.

ici si $\sigma_1^2=5$ et $\sigma_2^2=3$ $\quad 4\sigma_1^2+9\sigma_2^2 = 47$

si $\sigma_1=5$ et $\sigma_2=3$ $\quad 4\sigma_1^2+9\sigma_2^2 = 4\times 25+9\times 9 = 181$

et $\sigma(Y) = \sqrt{181}$.

2) Dans les 2 cas $E(Y) = 2E(X_1) + 3E(X_2) = 2\times 1 + 3\times 2 = 8$

$var(Y) = var(2X_1+3X_2) = var(2X_1) + var(3X_2) + 2cov(2X_1, 3X_2)$

$= 4var(X_1) + 9var(X_2) + 12cov(X_1, X_2)$

si $cov(X_1,X_2)=0$ $\quad var(Y) = 4var(X_1) + 9var(X_2)$

si $cov(X_1,Y_2) = -1$ $\quad var(Y) = 4var(X_1) + 9var(X_2) - 12$

Ex 2

1) $X_1 \sim \mathcal{N}(3 ; \sigma_1^2 = 4)$ $\quad X_2 \sim \mathcal{N}(1 ; \sigma_2^2 = 1)$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow X_2 - 2X_1 \sim \mathcal{N}(1-2\times 3 ; \sigma^2(Y) = 1+4\times 4) = \mathcal{N}(-5, \sigma^2(Y) = 17)$

$Var(X_2-2X_1) = Var X_2 + 4 var X_1$

2) $P(U \leq q) = 0{,}5 \Leftrightarrow \int_1^q \frac{1}{4}\,dx = \left[\frac{x}{4}\right]_1^q = \frac{q}{4} - \frac{1}{4} = 0{,}5$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-1} & \text{pour } x \in [1;5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ $\quad \Leftrightarrow q-1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{q=3}$

3) $E(Y) = E(X_2) - 2E(X_1) = 1 - 2\times 3 = -5$

$V(Y) = V(X_2-2X_1) = V(X_2) + V(-2X_1) + 2cov(X_2 ; -2X_1)$

$= V(X_2) + 4V(X_1) - 4cov(X_1, X_2)$

si $cov(X_1,X_2)=3$ $\quad V(Y) = 1 + 4\times 4 - 4\times 3 = 5$

4) $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow Cov(X_1, X_2) = 0$

TD 3   4

Ex 3

1) la loi de X est donnée par $P(X=1) = p = P(A)$ et $P(X=0) = 1-p = 1-P(A)$

idem pour la loi de Y :

$P(Y=1) = q = P(B)$ et $P(Y=0) = 1-q = 1-P(B)$

2) $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = P(A\cap B) - P(A).P(B)$

$E(X) = 1 \times P(X=1) + 0 \times P(X=0) = 1 \times P(A) = P(A)$ $\quad E(Y) = P(B)$

$E(XY) = 1\times 1 \times P(X=1, Y=1) + 0 \times (1 - P(X=1,Y=1))$

$= 1 \times P(A\cap B)$

3) X et Y non corrélés $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\text{cov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B)$

$\Leftrightarrow$ A et B sont indépendants

D'après cours X et Y indépendants $\Rightarrow$ $\text{cov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow$ X et Y non corrélés

Réciproquement : X et Y non corrélés $\Leftrightarrow \text{cov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow$

$P(A\cap B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow P(X=1, Y=1) = P(X=1).P(Y=1)$

id pour $\bar{A}, B$ $\quad A, \bar{B}$ $\quad \bar{A}, \bar{B}$ donc

$\forall i = 0,1$, $j = 0,1$ $\quad P(X=i, Y=j) = P(X=i)\,P(Y=j)$ donc X et Y indép.

Ex 4

1) (a) $E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$

$\text{var}(\bar{X}) = \text{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum \text{var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

(b) $\text{cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = \text{cov}(X_i, \bar{X}) - \text{cov}(\bar{X}, \bar{X}) =$

$= \text{cov}\left(X_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) - \text{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\text{cov}(X_i, X_j)}_{\substack{=0 \text{ si } i\neq j \\ = \text{var}(X_i) \text{ sinon}}} - \text{var}(\bar{X})$

$= \frac{1}{n}\text{var}(X_i) - \text{var}\,\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0$

$\boxed{TD3}$ 3/

2) $\mathrm{cov}(\bar{X}, S_n^2) = \frac{1}{n-1} \sum_i \mathrm{cov}(\bar{X}, (X_i - \bar{X})^2)$

$\mathrm{cov}(\bar{X}, (X_i - \bar{X})) = 0$

Ex5

1). $F_{M_n}(x) = P(\mathrm{Max}(X_1, \dots X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots X_n \leq x)$

$= P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \dots \times P(X_n \leq x) = \boxed{F(x)}^n$

2) $F_{m_n}(x) = P(\mathrm{Min}(X_1, X_2, \dots X_n) \leq x)$

$= P\Big((X_1 \leq x, X_2 \geq x, X_3 \geq x, \dots X_n \geq x)$

$\cup (X_2 \leq x$, les autres $\geq x) \cup \dots \cup (X_n \leq x$, les autres $\geq x)\Big)$

$= \sum \text{Proba} \underset{\text{indep}}{=} n F(x) (1 - F(x))^{n-1}$

3) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

loi de M_n : $F_{M_n}(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$F'_{M_n}(x) = f_{M_n}(x) = \begin{cases} n \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

loi de m_n $\quad F_{m_n}(x) = \begin{cases} n (1 - e^{-\lambda x})(e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$f_{m_n}(x) = F'_{m_n}(x) = n \lambda (e^{-\lambda x})^n \left[(n+1) e^{-\lambda x} - 1 \right)$ à VÉRIFIER