Département STID - IUT Paris Descartes **2017-2018**
Probabilités - S2

TD 1 - Lois continues usuelles - Transformation de variables aléatoires

Exercice 1

1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1;2]$.

a- Calculer $\mathcal{P}(X \leqslant 0)$, $\mathcal{P}(-1/2 \leqslant X \leqslant 1)$, $\mathcal{P}(0 \leqslant X \leqslant 3/2)$, $\mathcal{P}(X < -2)$ et $\mathcal{P}(X \leqslant 3/2)$.

b- Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

2) Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme telle que $\mathcal{P}(Y \leqslant 1) = 0,95$ et $\mathcal{P}(Y > -1/2) = 0,90$. Calculer les paramètres de la loi de Y.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2.

1) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

2) Calculer $\mathcal{P}(X \geqslant 2)$, $P(1 < X < 3)$ et $P(|X-2| \geqslant 1)$.

3) Trouver u tel que $\mathcal{P}(X \leqslant u) = 0,95$.

4) Trouver v tel que $\mathcal{P}(X > v) = 0,95$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1/4$ et $Y = 2X$.

1) Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.

2) Quelle loi de probabilité suit la variable Y ?

3) Calculer $P(|Y-1| < 1/2)$.

Exercice 4

1) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Donner les valeurs de $\mathcal{P}(X > 2,34)$, $\mathcal{P}(0,2 \leqslant X \leqslant 1,9)$, $\mathcal{P}(|X| \leqslant 1,96)$, et $\mathcal{P}(|X| > 0,84)$.

2) Soit X une variable aléatoire de loi normale de paramètres 2 et 9. Donner les valeurs de $\mathcal{P}(X \leqslant 4)$, $\mathcal{P}(0 \leqslant X \leqslant 4)$, $\mathcal{P}(|X| \leqslant 5)$.

Exercice 5

1) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite (on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$). Trouver u tel que

(a) $P(X > u) = 0,05$ **(b)** $P(X \leqslant u) = 0,90$ **(c)** $P(|X| \leqslant u) = 0,95$ **(d)** $P(|X| > u) = 0,90$

2) Soit une variable aléatoire Z qui suit une loi normale d'espérance 1 et de variance 4 (on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(1,4)$, avec $\sigma^2 = 4$). Trouver le nombre u tel que

(a) $P(Z > u) = 0,05$ **(b)** $P(Z \leqslant u) = 0,90$ **(c)** $P(|Z| \leqslant u) = 0,95$ **(d)** $P(|Z| > u) = 0,90$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire et $Y = aX + b$, où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$. Soient F et G les fonctions de répartition respectives de X et de Y. Déterminer G en fonction de F et en déduire la densité g de la loi de Y dans les cas suivants :

1) X suit une loi uniforme sur $[0;1]$ (dans le cas où $a > 0$).

2) X suit une loi exponentielle de paramètre 2.

3) X suit une loi normale centrée réduite.

Exercice 7
Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance m et d'écart-type σ. Soit $Y = \exp(X)$. Soient F et G les fonctions de répartition respectives de X et de Y. Soient f et g leurs densités respectives.

1) $\forall y \in \mathbb{R}$, donner l'expression de G en fonction de F.

2) En déduire l'expression de la densité g de la loi de Y.

Exercice 8
La durée de vie ou de fonctionnement (exprimées en semaines) d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire continue X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que la probabilité pour qu'un composant soit encore en état de marche après 25 semaines de fonctionnement est de 0,95.

1) Déterminer la valeur de λ.

2) Quelle est la durée moyenne de fonctionnement d'un composant de ce type ?

3) Calculer la probabilité pour qu'un composant soit encore en état de marche au bout de 100 semaines.

4) Sachant qu'un composant a bien fonctionné pendant 100 semaines, quelle la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de 150 semaines ?

Exercice 9
On dit qu'une variable X suit une loi translatée de Weibull de paramètres $(4; 1; 7)$ lorsque la variable $Y = 4(X - 7)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

1) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

2) Calculer $P(X \leqslant 8), P(X > 8,5), P(8 \leqslant X \leqslant 8,5)$.

3) Déterminer la fonction de répartition de la variable X.

Exercice 10
(Extrait de l'épreuve de probabilités d'Avril 2004)
Un pâtissier vend des boîtes de 20 petits fours. Les boîtes sont composées de différents types de petits fours, tous tirés au hasard parmi un grand nombre en sortie de cuisson. Une boîte est dite gastronomique si son poids est supérieur à 410g. On suppose que le poids de chaque petit four suit une loi normale d'espérance 20g et d'écart-type 3g.

1) Donner, en la justifiant, la loi suivie par le poids d'une boîte de petits fours (on supposera que le poids de la boîte vide est négligeable devant celui des petits fours).

2) Calculer la probabilité pour qu'une boîte soit gastronomique.

3) On suppose maintenant que la variance du poids d'un petit four n'est pas connue, son espérance restant la même. On note cette variance σ^2.

(a) Donner la loi suivie par le poids d'une boîte de petits fours.

(b) On prélève au hasard sur le présentoir de la pâtisserie 10 boîtes de petits fours et on considère le poids moyen

$$\overline{W} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} W_i$$

de ces boîtes, où chaque W_i est le poids de la boîte i. Donner la loi de $\overline{W}$ et en déduire la valeur de σ^2 pour laquelle la probabilité pour que $\overline{W}$ soit supérieur à 410g est égale à 3%.

Mise au point sur les lois sans mémoire

On dit que les lois géométrique (loi discrète) et exponentielle (loi continue) sont des **lois sans mémoire** parce qu'elles vérifient la propriété suivante :

$P(X > i+j|X > i) = P(X > j),\ i, j$ étant des nombres entiers $\geqslant 1$ dans le cas de la loi géométrique,
$P(X > x+u|X > x) = P(X > u),\ u$ étant un nombre réel $\geqslant 0$ dans le cas de la loi exponentielle.

Il peut s'agir de phénomènes de survie d'objets sans usure. Par exemple on trouve sur internet l'exemple de la probabilité qu'un verre se casse une semaine après l'achat (il est neuf), ou d'ici une semaine à partir de maintenant (2 ans après l'achat du verre), $u = 1$ semaine, $x = 2$ ans. Dans le cas des êtres humains, ou de certains appareils électro-ménagers, la loi de survie n'est pas exponentielle car il y a vieillissement ou usure. Et donc la probabilité de vivre jusqu'à 30 ans pour un nouveau né est nettement supérieure à la probabilité de vivre jusqu'à 90 ans pour un individu de 60 ans !

On peut aussi citer des phénomènes d'attente : dans un intervalle de temps d'affluence homogène dans un supermarché, par exemple de 14h à 16h, on ouvre 10 caisses. La probabilité qu'un client se présente à une caisse entre 14h et 14h15 est la même que la probabilité qu'un client se présente à une caisse entre 15h et 15h45.

Démonstration dans le cas de la loi exponentielle :

Si on appelle A et B les évènements $A = \{X > x+u\} = \{X > 150\}$ et $B = \{X > x\} = \{X > 100\}$, comme dans l'**exercice 8**, alors

• On remarque que $A \subset B$ car si le composant a survécu plus de 150 semaines, il a nécessairement survécu plus de 100 semaines. On en déduit que $A \cap B = A$.

• D'autre part

$$P(X > x+u|X > x) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(X > 150)}{P(X > 100)} = \frac{1-P(X \leqslant 150)}{1-P(X \leqslant 100)}$$

Or $P(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et donc $1 - P(X \leqslant x) = e^{-\lambda x}$.

Donc $P(X > 150|X > 100) = \dfrac{e^{-150\lambda}}{e^{-100\lambda}} = e^{-150\lambda-(-100\lambda)} = e^{-50\lambda} = P(X > 50)$.

Le calcul littéral se fait de la même manière, on obtient

$$P(X > x+u|X > x) = P(X > u)$$

Attention La seule loi continue qui satisfait cette propriété est la loi exponentielle, cette propriété est fausse pour toute autre loi.

Attention Il serait **faux** d'écrire $P(X > 150|X > 100) = P(X > 150)$ car les évènements $\{X > 150\}$ et $\{X > 100\}$ ne sont pas indépendants.